

En español

Simulación numérica del proceso de fractura en concreto reforzado mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo. Parte I: formulación

Dorian Luís Linero Segrera¹, Javier Oliver² y
Alfredo E. Huespe³

RESUMEN

En general, las estructuras de concreto reforzado como vigas, columnas y muros están conformadas por entramados complejos de barras de acero embebidas en una matriz de concreto, las cuales exhiben múltiples fisuras ante la aplicación de cargas externas elevadas. Este artículo presenta la formulación de un modelo numérico cuyo objetivo es describir el proceso de fractura en elementos de concreto reforzado a partir de la fracción volumétrica del concreto y del acero. El modelo utiliza un campo enriquecido de la deformación para describir la formación y propagación de fisuras en un material compuesto, tal como lo establecen la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* y la *teoría de mezclas*. El material compuesto está constituido por una matriz de concreto y uno o dos paquetes de barras de acero ortogonales entre sí. El acero y el concreto se representan con modelos de *plasticidad unidimensional* y de *daño escalar con tracción y compresión diferenciada*, respectivamente. La acción pasador y los efectos del deslizamiento entre las barras y la matriz, se describen con modelos adicionales que relacionan el esfuerzo y la deformación de los materiales componentes. Finalmente, se concluye que el modelo propuesto se puede implementar con facilidad en el método de los elementos finitos, dado que permanecen muchas características del procedimiento numérico no lineal convencional. Asimismo, el modelo permite analizar el problema en la *escala macroscópica*, lo cual elude la construcción de mallas de elementos finitos de cada material componente y de sus efectos de interacción, reduciendo así el costo computacional.

Palabras clave: mecánica computacional, mecánica de la fractura, discontinuidades fuertes, teoría de mezclas, concreto reforzado.

Recibido: febrero 19 de 2009

Aceptado: junio 11 de 2010

In English

Numerical modeling of the fracture process in reinforced concrete by means of the continuum strong discontinuity approach. Part I: formulation

Dorian Luís Linero Segrera⁴, Javier Oliver⁵ and
Alfredo E. Huespe⁶

ABSTRACT

Reinforced concrete structures generally refers to beams, columns and walls which are constituted by complex lattices of steel bars embedded in a concrete matrix, exhibiting multiple cracks due to high external loads. This paper presents the formulation of a numerical model aimed at describing the fracture process in reinforced concrete, from the volumetric ratio of concrete and steel. Crack formation and propagation in a composite material is described in the model by an enhanced strain field, such as that established in the continuum strong discontinuity approach and mixture theory. The composite material is constituted by a concrete matrix and one or two steel bar orthogonal packages. The steel and concrete are represented by a one-dimensional plasticity model and a scalar damage model having different tension and compression strength, respectively. The dowel action and the bond-slip effects between the bars and the matrix are described with additional models relating component material stress and strain. It is concluded that the proposed model can easily be implemented in the finite element method, due to several conventional nonlinear numerical process characteristics which remain. The model would also allow the problem to be analysed at macroscopic scale, thereby avoiding a finite element mesh having to be constructed for each component material and its interaction effects and reducing computational costs.

Keywords: computational mechanics, fracture mechanics, strong discontinuity, mixture theory, reinforced concrete.

Received: february 19th 2009

Accepted: jun 11th 2010

¹ Ingeniero Civil. M.Sc., en Estructuras. Ph.D., en Análisis Estructural, Universidad Politécnica de Cataluña, España. Profesor Asociado, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. dlineros@unal.edu.co

² Ingeniero Civil. Ph.D., en Ingeniería Civil, Universidad Politécnica de Cataluña, España. Profesor Titular, Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras, Universidad Politécnica de Cataluña. España. oliver@cimne.upc.edu

³ Ingeniero Mecánico Electricista. M.Sc., en Ciencias de la Ingeniería. Ph.D., en Ciencias de la Ingeniería, Universidad Federal de Rio de Janeiro, Brasil. Investigador del CIMEC/Intec – CONICET, Santa Fe, Argentina. ahuespe@intec.unl.edu.ar

⁴ Civil Engineer. M.Sc., in Struture. Ph.d., in Structural Analysis, Universidad Politécnica de Cataluña, Spain. Professor, Faculty of Engineering, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. dlineros@unal.edu.co

⁵ Civil Engineer. Ph.D., in Civil Engineering, Universidad Politécnica de Cataluña, Spain. Professor, Department of Strength of Materials and Structures, Universidad Politécnica de Cataluña. Spain. oliver@cimne.upc.edu

⁶ Mechanic and Electrical Engineer. M.Sc., in Science of Enginnering. Ph.D., in Science of Enginnering, Universidad Federal de Rio de Janeiro, Brasil. Researcher, CIMEC/Intec – CONICET, Santa Fe, Argentina. ahuespe@intec.unl.edu.ar

Introducción

El comportamiento del concreto reforzado durante el proceso de fractura se puede predecir mediante un modelo numérico capaz de capturar la formación y propagación de fisuras en todos los puntos del sólido, a partir de las propiedades del concreto simple y del acero de refuerzo. La implementación de dicho modelo en el método de los elementos finitos permite representar la geometría y el régimen de carga de cualquier miembro estructural.

La simulación numérica de estructuras de concreto reforzado se puede hacer a diferentes escalas. En la escala mesoscópica, la malla de elementos finitos representa cada uno de los materiales por separado, incluyendo elementos especiales que describen la interacción entre concreto y acero. En general este tipo de análisis demanda mallas muy finas y en consecuencia un alto costo computacional. En cambio, en la escala macroscópica cada punto material en el interior de un elemento finito responde al modelo constitutivo de un material compuesto que representa el comportamiento de un grupo de barras de acero embebidas en una matriz de concreto.

Muchos modelos describen adecuadamente el comportamiento del concreto reforzado (Feenstra y de Borst, 1995; Pietruszczak y Xu, 1995; Belletti, Cerioni *et al.*, 2001; Jendele, Cervenka *et al.*, 2001; Luccioni y López, 2002; Belletti, Bernardi *et al.*, 2003; Pietruszczak y Winnicki, 2003; Luccioni, López *et al.*, 2005; Yu y Ruiz, 2005; Ruiz, Carmona *et al.*, 2006; Menin, Trautwein *et al.*, 2009; Shi, 2009); sin embargo, muestran las siguientes limitaciones: 1) prescinden de un algoritmo que describa la trayectoria de las fisuras independientemente de la orientación de la malla de elementos finitos, 2) pierden el contexto de la mecánica del medio continuo al comienzo del proceso de fractura, recurriendo a relaciones adicionales *ad hoc* que definan el comportamiento mecánico entre las caras de una fisura, 3) a diferencia del análisis de bifurcación material, los criterios utilizados para establecer la formación de una fisura son independientes de la condición de existencia del salto en el desplazamiento, 4) en algunos casos se considera un estado de fisuración distribuida a partir del régimen inelástico del concreto, donde las fisuras mantienen una separación constante evaluada de forma analítica, limitando la posibilidad de formación de una macrofisura localizada, y 5) en otros modelos se requieren relaciones tracción-salto explícitas en la matriz de concreto y en las barras de acero.

La formulación presentada en este trabajo pretende superar las limitaciones anteriores mediante un modelo macroscópico homogeneizado del concreto reforzado basado en la *teoría de mezclas* (Truesdell y Toupin, 1960; Oller, 2003), que describa la formación de fisuras conservando el contexto de la mecánica del medio continuo y aplicando la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* (CSDA) (Oliver, 1996a; Oliver, 2000; Oliver y Huespe, 2004a; Oliver, Huespe *et al.*, 2006; Linero, Oliver *et al.*, 2007; Oliver, Linero *et al.*, 2008).

Modelos constitutivos de los materiales componentes

El comportamiento de la matriz de concreto se describe mediante un modelo de daño escalar isotrópico (Lemaitre, 1992; Lemaitre y Desmorat, 2005), cuya resistencia a tracción σ_t^c es diferente de su resistencia a compresión σ_c^c , como lo muestra la figura 1a.

Introduction

The reinforced concrete fracture process can be predicted by means of a numerical model able to capture crack formation and propagation of all solid points. Implementing the model in the finite element method allows any structural member's geometry and loading regime to be represented.

Reinforced concrete structure numerical modeling can be done on different scales. The finite elements mesh represents each material separately on a mesoscopic scale, including special elements describing the interaction between concrete and steel. This kind of analysis usually requires fine mesh and consequently high computational costs. On the other hand, each material point inside a finite element on a macroscopic scale has a constitutive model of composite material representing the behavior of a set of steel bars embedded in a concrete matrix.

A lot of models have satisfactorily described the behavior of reinforced concrete (Feenstra and de Borst, 1995; Pietruszczak and Xu, 1995; Belletti, Cerioni *et al.*, 2001; Jendele, Cervenka *et al.*, 2001; Luccioni and Lopez, 2002; Belletti, Bernardi *et al.*, 2003; Pietruszczak and Winnicki, 2003; Luccioni, Lopez *et al.*, 2005; Yu and Ruiz, 2005; Ruiz, Carmona *et al.*, 2006; Menin, Trautwein *et al.*, 2009; Shi, 2009), with the followings restrictions. They do not use an algorithm for describing crack paths independently of the direction of the finite elements mesh. They lose the context of continuum mechanics when the fracture process begins, consequently requiring additional *ad hoc* relationships for defining the mechanical behavior between the faces of a crack. Unlike material bifurcation analysis, the criteria used for establishing the formation of a crack are explicitly independent of the condition regarding displacement jump. In some cases, a distributed cracking state is considered from the concrete's inelastic regime in which cracks maintain a constant spacing evaluated in an analytical form. Consequently, the formation of a macro-crack located in composite material cannot be captured. Other models require explicit relationships between traction and jump in the concrete matrix and the steel bars.

The formulation presented in this work was expected to overcome the previous restrictions by means of a homogenous macroscopic model of reinforced concrete, based on the mixture theory (Truesdell and Toupin, 1960; Oller, 2003) which describes the formation of cracks in the context of continuum mechanics and applying the continuum strong discontinuity approach (CSDA) (Oliver, 1996a; Oliver, 2000; Oliver and Huespe, 2004a; Oliver, Huespe *et al.*, 2006; Linero, Oliver *et al.*, 2007; Oliver, Linero *et al.*, 2008).

Constitutive models of the component materials

Concrete matrix behaviour can be described with an isotropic scalar damage model (Lemaitre, 1992; Lemaitre and Desmorat, 2005) in which its tensile strength σ_t^c is different to its compression strength σ_c^c as indicated in Figure 1a.

En español

En particular, el criterio de daño del modelo constitutivo compara la variable de evolución con una norma especial del campo de la deformación, la cual ha sido modificada por un factor asociado con el signo de los esfuerzos principales efectivos (Oliver *et al.*, 1990). La ecuación constitutiva tangente del modelo que representa al concreto simple es de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c = \mathbf{C}_{tg}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \quad (1)$$

siendo $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$ y $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c$ las tasas del tensor de deformación y de esfuerzo, respectivamente. El tensor constitutivo tangente \mathbf{C}_{tg}^c es función del estado de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ y de la historia de carga indicada por las variables internas del modelo de daño α^c .

In English

The constitutive model's damage criteria particularly compares the evolution variable with a special strain field norm which has been modified by a factor associated with the sign of effective principal stress (Oliver, Cervera *et al.*, 1990). The tangent constitutive equation for a model representing simple concrete is expressed thus:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c = \mathbf{C}_{tg}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \quad (1)$$

where $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$ and $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c$ are the strain rate tensor and the stress rate tensor, respectively. The tangent constitutive tensor \mathbf{C}_{tg}^c is a function of strain state $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ and of the loading history indicated by the internal variables of the damage model α^c .

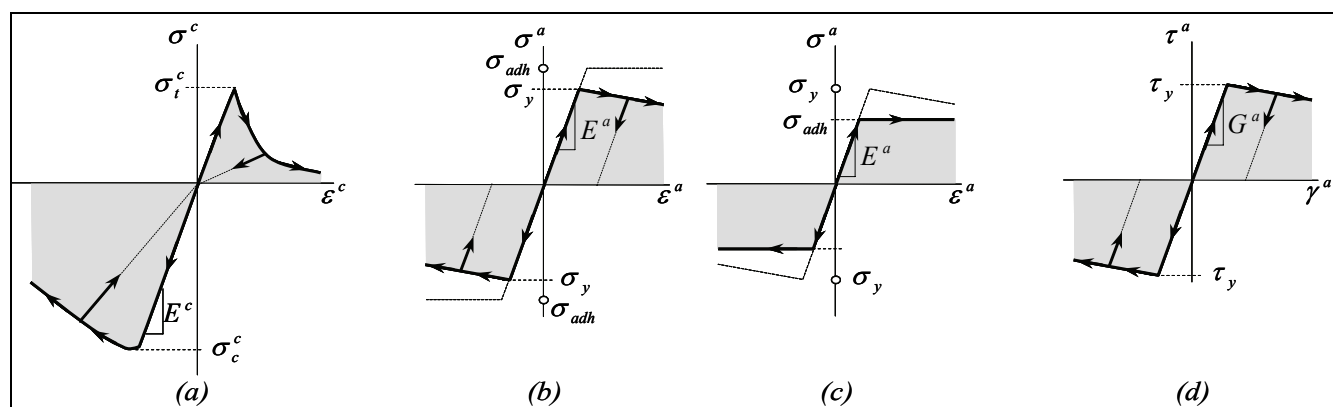


Figura 1. Relación esfuerzo-deformación uniaxial de los modelos constitutivos de los materiales componentes: a) modelo de daño para el concreto, b) modelo de barra deslizante con adherencia perfecta, c) modelo de barra deslizante con pérdida total de adherencia, d) modelo de la acción pasador.

Figure 1. Uniaxial relationship stress – component materials constitutive model strain: (a) concrete damage model, (b) slipping bar model with perfect adherence, (c) slipping bar model with complete adherence loss, (d) dowel action model.

El comportamiento axial de las barras de acero embebidas en la matriz de concreto se representa mediante el *modelo de barra deslizante*, que combina un modelo unidimensional isótropo de plasticidad con ablandamiento (Simó y Hughes, 1998; de Souza, Peric *et al.*, 2008) y una condición de adherencia entre los resaltes de las barras de acero y el concreto circundante. Las propiedades mecánicas que describen al material son el módulo de Young E^a , el esfuerzo de fluencia a tracción o a compresión σ_y y el módulo de endurecimiento H^a . Se define como σ_{adh} al esfuerzo del acero cuando se pierde la adherencia con el concreto obtenido de ensayos de arrancamiento (Gambrova, Rosati *et al.*, 1989; Hutchinson y Jensen, 1990; Naaman, Namur *et al.*, 1991).

Si la adherencia es perfecta el modelo de barra deslizante coincide con el modelo de plasticidad con ablandamiento, cuya etapa inelástica comienza después de alcanzado el esfuerzo de fluencia del acero, es decir, para $\sigma_y < \sigma_{adh}$, como lo muestra la figura 1b. En cambio, si la adherencia se pierde antes de alcanzar el esfuerzo de fluencia, es decir, si $\sigma_y > \sigma_{adh}$, el modelo de barra deslizante indica que el régimen elástico está limitado por el esfuerzo σ_{adh} , seguido de una etapa de plasticidad perfecta asociada al deslizamiento de las barras en la matriz (Figura 1c).

The axial behaviour of the steel bars embedded in the concrete matrix is represented by the slipping bar model which combines a plasticity isotropic one-dimensional model with softening strain (Simó and Hughes, 1998; de Souza, Peric *et al.*, 2008) and adherence between the steel bar rib and the surrounding concrete. The material mechanics properties are Young's modulus E^a , the yielding stress to tension or compression σ_y and the hardening modulus H^a . Steel stress defined as σ_{adh} is obtained from pull-out tests when adherence with the concrete has disappeared (Gambrova, Rosati *et al.*, 1989; Hutchinson and Jensen, 1990; Naaman, Namur *et al.*, 1991).

If there is perfect adherence then the slipping bar model coincides with the softening plasticity model and its inelastic stage begins after reaching the steel yielding stress, that is $\sigma_y < \sigma_{adh}$, as shown in Figure 1b. On the other hand, if adherence disappears before reaching the yielding stress, that is $\sigma_y > \sigma_{adh}$, then the slipping bar model indicates that the elastic regime is limited by stress σ_{adh} , followed by perfect plastic stage associated with the slipping of the bars in the matrix (Figure 1c).

En español

La ecuación constitutiva tangente del modelo de barra deslizante relaciona las tasas de esfuerzo normal $\dot{\sigma}^a$ y de deformación longitudinal $\dot{\epsilon}^a$ en la dirección de la barra de la forma:

$$\dot{\sigma}^a = E_{tg}^a \dot{\epsilon}^a \quad (2)$$

donde el módulo de elasticidad tangente E_{tg}^a depende de la deformación plástica ϵ_p^a , de las variables internas del modelo de plasticidad α^a y de la relación entre los esfuerzos límite σ_y y σ_{adh} .

Después de producirse una fisura de poca apertura en el concreto, la fuerza cortante actuante es resistida principalmente por la capacidad del acero de refuerzo a corte directo en las caras de la fisura (Park y Paulay, 1975; Nawy, 2008). Este fenómeno se denomina *acción pasador* y se representa mediante un modelo de plasticidad escalar con ablandamiento, el cual relaciona la tasa de esfuerzo cortante $\dot{\tau}^a$ y la tasa de deformación angular ingenieril $\dot{\gamma}^a$ en la sección transversal de las barras, como lo indica la ecuación constitutiva tangente de la forma:

$$\dot{\tau}^a = G_{tg}^a \dot{\gamma}^a \quad (3)$$

En la figura 1d se observa que el módulo tangente a cortante G_{tg}^a es igual al módulo de elasticidad al corte del acero G^a antes de alcanzar el esfuerzo de fluencia a cortante τ_y . La siguiente etapa estará definida por el régimen inelástico del acero.

Modelo constitutivo del concreto reforzado como material compuesto

Cada punto del sólido se compone de dos grupos de barras de acero orientadas en las direcciones **r** y **s**, respectivamente, embebidos en una matriz de concreto, como lo señala la Figura 2. La teoría de mezclas establece que cada volumen infinitesimal de material compuesto es la suma de las sustancias que lo conforman (Truesdell y Toupin, 1960; Oller, 2003). En un sistema en paralelo, la contribución de cada componente al esfuerzo del compuesto es función de su volumen de participación, a la vez que la deformación es común en todos ellos. Sin embargo, es necesario evaluar la deformación en una dirección específica cuando se trata de definir el comportamiento unidimensional de las barras.

La compatibilidad entre el tensor de deformaciones del material compuesto y las deformaciones de cada material componente está definida mediante las siguientes hipótesis: 1) el tensor de deformaciones en la matriz ϵ^c es igual al tensor de deformaciones del material compuesto ϵ , 2) la deformación longitudinal ϵ^{ar} resultante del comportamiento axial de las barras en dirección **r** es igual a la componente longitudinal en dirección **r** del tensor de deformaciones del material compuesto ϵ_{rr} , 3) la deformación longitudinal ϵ^{as} resultante del comportamiento axial de las barras en dirección **s** es igual a la componente longitudinal en dirección **s** del tensor de deformaciones del material compuesto ϵ_{ss} , y 4) dada la capacidad a cortante de las barras cuando cruzan una fisura, se puede suponer que la deformación angular ingenieril de las barras γ^a es igual a la componente de deformación angular ingenieril del material compuesto en el plano *rs* indicada como γ_{rs} .

In English

The tangent constitutive equation of the slipping bar model relates to normal stress rate $\dot{\sigma}^a$ and normal strain rate $\dot{\epsilon}^a$ in the direction of the bar as:

$$\dot{\sigma}^a = E_{tg}^a \dot{\epsilon}^a \quad (2)$$

where the tangent elasticity modulus E_{tg}^a depends on the plastic strain ϵ_p^a , the internal variables of plasticity model α^a and the relationship between limit stress σ_y and σ_{adh} .

After that, a slight crack is formed, shear force being mainly supported by the steel reinforcement's ability to direct shear to the sides of the crack (Park and Paulay, 1975; Nawy, 2008). This phenomenon is named *dowel action* and it is represented by a softening scalar plasticity model which relates shear stress rate $\dot{\tau}^a$ to engineering shear strain rate $\dot{\gamma}^a$ at the cross-section of the bars, as indicated in the tangent constitutive equation:

$$\dot{\tau}^a = G_{tg}^a \dot{\gamma}^a \quad (3)$$

It can be observed in Figure 1d that tangent shear modulus G_{tg}^a is equal to steel shear elasticity modulus G^a after reaching yielding shear stress τ_y . The inelastic regime determines the steel's next stage.

Constitutive model of reinforced concrete as a composite material

Each point on a solid has two sets of steel bars embedded in a concrete matrix; they are orientated in directions **r** and **s** respectively, as shown in Figure 2. The mixture theory establishes that each infinitesimal volume of composite material results from adding the substances forming it (Truesdell and Toupin, 1960; Oller, 2003). In a parallel system, each component's contribution to composite stress is a function of their volumetric participation and the strain of each component is the same. However, the strain in a specific orientation is evaluated when the one-dimensional behavior of the bars has been defined.

The compatibility between the composite material strain tensor and the strain of each component material were defined here by the following hypothesis. The strain tensor of matrix ϵ^c was equal to the strain tensor of composite material ϵ . The normal strain ϵ^{ar} obtained from axial behavior of the bars in **r** direction was equal to the normal term of composite material strain tensor ϵ_{rr} . The normal strain ϵ^{as} obtained from the axial behavior of the bars in **s** direction was equal to normal term ϵ_{ss} in **s** direction of the composite material strain tensor. Given that the bars crossing a crack had shear capacity, it was assumed that the engineering shear strain γ^a of the bars was equal to term γ_{rs} in the *rs* plane of the composite material strain tensor.

En español

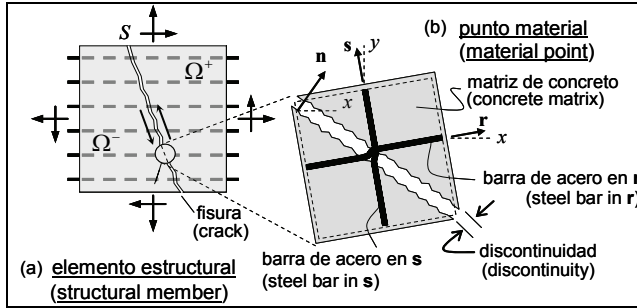


Figura 2. Modelo del concreto reforzado como material compuesto: a) sólido con discontinuidad S, b) punto material

Derivando en el tiempo las condiciones anteriores de compatibilidad se obtienen las siguientes expresiones:

$$\dot{\epsilon}^c = \dot{\epsilon} \text{ (matriz de concreto)} \quad (4)$$

$$\dot{\epsilon}^{ar} = \dot{\epsilon}_{rr} = \mathbf{r} \cdot \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{r} \text{ (barra de acero en dirección } \mathbf{r}) \quad (5)$$

$$\dot{\epsilon}^{as} = \dot{\epsilon}_{ss} = \mathbf{s} \cdot \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{s} \text{ (barra de acero en dirección } \mathbf{s}) \quad (6)$$

$$\dot{\gamma}^a = \dot{\gamma}_{rs} = 2\dot{\epsilon}_{rs} = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{s} \text{ (acción pasador en el plano } rs) \quad (7)$$

Conocida la tasa del tensor de deformaciones del material compuesto $\dot{\epsilon}$, se calcula la tasa de deformación propia de cada material componente y de los efectos de interacción utilizando las ecuaciones (4) a (7). Introduciendo las tasas de deformación resultantes al modelo constitutivo respectivo se obtiene el esfuerzo particular de cada material y de sus efectos de interacción.

Mediante el modelo de daño isótropo se obtiene la tasa del tensor de esfuerzo en la matriz de concreto $\dot{\sigma}^c$. Por otro lado, aplicando el modelo de barra deslizante se calculan por separado las tasas de esfuerzo normal $\dot{\sigma}^{ar}$ y $\dot{\sigma}^{as}$ de las barras de acero orientadas en dirección \mathbf{r} y \mathbf{s} , respectivamente. El efecto de la acción pasador se refleja en la tasa de esfuerzo cortante de las barras de acero $\dot{\tau}^a$ obtenido del modelo señalado anteriormente.

La contribución de cada constituyente en el comportamiento del material compuesto está definida por el coeficiente de participación volumétrica, el cual corresponde a la fracción de volumen del material componente con respecto al volumen total del material compuesto. El coeficiente de participación volumétrica de la matriz de concreto se designa como k^c , mientras que k^{ar} y k^{as} son los coeficientes de participación volumétrica de las barras de acero orientadas en la dirección \mathbf{r} y \mathbf{s} , respectivamente. Siendo el volumen del material compuesto la suma de sus partes se debe cumplir que $k^c + k^{ar} + k^{as} = 1$.

La tasa del tensor de esfuerzos del material compuesto corresponde a la suma de los tensores de esfuerzos de la matriz de concreto y de las barras de acero multiplicados por sus respectivos coeficientes de participación volumétrica, así:

$$\dot{\sigma} = k^c \dot{\sigma}^c + k^{ar} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \dot{\sigma}^{ar} + k^{as} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \dot{\sigma}^{as} + 2(k^{ar} + k^{as}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^{sym} \dot{\tau}^a \quad (8)$$

Sustituyendo las ecuaciones de compatibilidad de las tasas de deformación de cada material componente en su respectiva ecuación constitutiva tangente, y reemplazando el resultado en la expresión anterior, se obtiene la ecuación constitutiva tangente del material compuesto de la forma:

In English

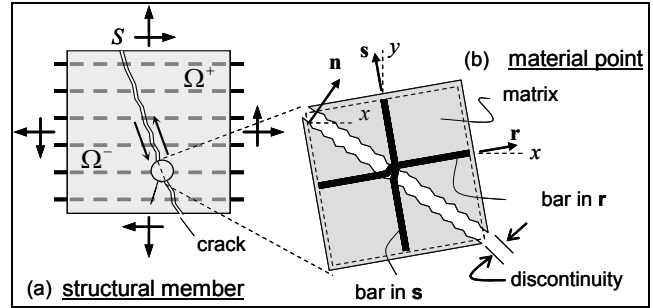


Figure 2. Reinforced concrete model as composite material: (a) solid with discontinuity S, (b) material point.

The following equations were derived from the previous compatibility conditions:

$$\dot{\epsilon}^c = \dot{\epsilon} \text{ (concrete matrix)} \quad (4)$$

$$\dot{\epsilon}^{ar} = \dot{\epsilon}_{rr} = \mathbf{r} \cdot \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{r} \text{ (steel bar in } \mathbf{r} \text{ direction)} \quad (5)$$

$$\dot{\epsilon}^{as} = \dot{\epsilon}_{ss} = \mathbf{s} \cdot \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{s} \text{ (steel bar in } \mathbf{s} \text{ direction)} \quad (6)$$

$$\dot{\gamma}^a = \dot{\gamma}_{rs} = 2\dot{\epsilon}_{rs} = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{s} \text{ (dowel action in } rs \text{ plane)} \quad (7)$$

Given that the composite material strain rate tensor $\dot{\epsilon}$ is well-known, the strain rate of each component material and of the interaction effects were computed with equations (4) to (7). These strain rates were put into the respective constitutive model to obtain the stress of each material and its interaction effects.

The stress rate tensor of concrete matrix $\dot{\sigma}^c$ was obtained by means of the isotropic damage model. On the other hand, the normal stress rate of the steel bars $\dot{\sigma}^{ar}$ and $\dot{\sigma}^{as}$ oriented in \mathbf{r} and \mathbf{s} directions were obtained by applying the slipping bar model. The effect of the dowel action was observed in the shear stress rate of the steel bars $\dot{\tau}^a$ obtained from the previously indicated model.

Each component's contribution to the composite material's behaviour was defined by the volumetric participation factor which corresponded to the volume ratio of the component material regarding the composite material's whole volume. The volumetric participation factor of the concrete matrix was named k^c , whereas k^{ar} and k^{as} were the volumetric participation factor of the steel bars orientated in \mathbf{r} and \mathbf{s} directions, respectively. If the composite material volume was the sum of its components, then it had fulfilled the condition that $k^c + k^{ar} + k^{as} = 1$.

The stress rate tensor of composite material corresponded to the sum of the stress tensors of the concrete matrix and steel bars multiplied by its respective volumetric participation factor, thus:

$$\dot{\sigma} = k^c \dot{\sigma}^c + k^{ar} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \dot{\sigma}^{ar} + k^{as} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \dot{\sigma}^{as} + 2(k^{ar} + k^{as}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^{sym} \dot{\tau}^a \quad (8)$$

The tangent constitutive equation of composite material was obtained by substituting the compatibility equations of the strain rates of each component material in its respective tangent constitutive equation and replacing the result in the previous equation, thus:

En español

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{ig} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (9)$$

siendo \mathbf{C}_{ig} el tensor constitutivo tangente igual a:

$$\mathbf{C}_{ig} = k^c \mathbf{C}_{ig}^c + k^{ar} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) E_{ig}^a + k^{as} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) E_{ig}^a + 4(k^{ar} + k^{as}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^{sym} \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^{sym} G_{ig}^a$$

El procedimiento anterior, resumido en la figura 3, define al modelo constitutivo del concreto reforzado como un sistema en paralelo donde cada material constituyente tiene un modelo particular.

Descripción cinemática de materiales compuestos mediante la CSDA en el medio continuo

La construcción de un modelo constitutivo para el concreto reforzado implica una cinemática en la escala del material compuesto de tal forma que las tasas del vector de desplazamientos y en consecuencia del tensor de deformaciones son campos asociados al material compuesto. Lo anterior permite aplicar la descripción cinemática dada por la metodología de discontinuidades fuertes de continuo (CSDA) (Oliver, 1996b; Oliver y Huespe, 2004b; Oliver y Huespe, 2004a; Oliver, Huespe *et al.*, 2006), para predecir la aparición y propagación de las fisuras en el sólido.

En esta metodología se establece la existencia de un salto en el campo del desplazamiento a través de la superficie de fallo $[[\mathbf{u}]]$, capaz de generar valores no acotados (en sentido distribucional) en el campo de las deformaciones.

Sea un sólido Ω que exhibe una *discontinuidad fuerte* sobre la superficie S de normal \mathbf{n} , la cual divide al cuerpo en los dominios Ω^+ y Ω^- , como lo muestra la figura 2a. Se define el campo de la tasa de desplazamiento en un punto \mathbf{x} para un instante t como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + M_s(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) \\ M_s(\mathbf{x}) &= H_s(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \\ H_s(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \\ \text{siendo} \quad \varphi(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- / \Omega^h \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ / \Omega^h \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

donde $\dot{\bar{\mathbf{u}}}$ es la parte continua del salto de la tasa de desplazamiento y $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ es el salto de la tasa de desplazamiento en la discontinuidad.

La función elemental de salto unitario en el continuo $M_s(\mathbf{x})$ se calcula como la diferencia entre la función de Heaviside $H_s(\mathbf{x})$ y la función continua $\varphi(\mathbf{x})$ definida en una pequeña banda Ω^h contenida en S como se indica en la figura 4.

El campo de la tasa de deformaciones se evalúa aplicando el operador diferencial simétrico sobre el campo de la tasa de desplazamientos, de tal forma que la deformación se puede dividir en una parte compatible en función del desplazamiento en el continuo y una parte mejorada en términos del salto del desplazamiento.

In English

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{ig} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (9)$$

where tangent constitutive tensor \mathbf{C}_{ig} was equal to:

$$\mathbf{C}_{ig} = k^c \mathbf{C}_{ig}^c + k^{ar} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) E_{ig}^a + k^{as} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) E_{ig}^a + 4(k^{ar} + k^{as}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^{sym} \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^{sym} G_{ig}^a$$

The previous process defined the constitutive model of reinforced concrete as being a parallel system where each constitutive material had its own model (Figure 3).

Kinematic description of composite materials by means of the CSDA in the continuum

Constructing a reinforced concrete constitutive model entails modelling composite materials using kinematics so that displacement rate vectors and consequently the strain rate tensor become fields associated with the composite material. A kinematic description due to continuum strong discontinuity approach (CSDA) (Oliver, 1996b; Oliver and Huespe, 2004b; Oliver and Huespe, 2004a; Oliver, Huespe *et al.*, 2006) can thus be applied to predicting the formation and propagation of cracks in a solid.

This approach establishes the existence of a jump in the displacement field $[[\mathbf{u}]]$ on the failure surface which is able to generate unbounded values (in a distributional sense) in the strain field.

Let Ω be a solid exhibiting *strong discontinuity* on S of normal \mathbf{n} which splits the body into domains Ω^+ and Ω^- , as shown in Figure 2a. The displacement rate at material point \mathbf{x} and time t was defined as:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + M_s(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) \\ M_s(\mathbf{x}) &= H_s(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \\ H_s(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \\ \text{where} \quad \varphi(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- / \Omega^h \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ / \Omega^h \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Furthermore, $\dot{\bar{\mathbf{u}}}$ and $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ corresponded to the continuous part and displacement rate jump in the discontinuity, respectively.

In the continuum, the unit jump function $M_s(\mathbf{x})$ was computed as being the subtraction between Heaviside's function $H_s(\mathbf{x})$ and an arbitrary continuous function $\varphi(\mathbf{x})$ limited by a small band Ω^h in S , as indicated in Figure 4.

The strain rate field was evaluated with the symmetrical differential operator on the displacement rate field, so that the strain was split into a compatible part in terms of continuous displacement and an enhanced part in terms of displacement jump.

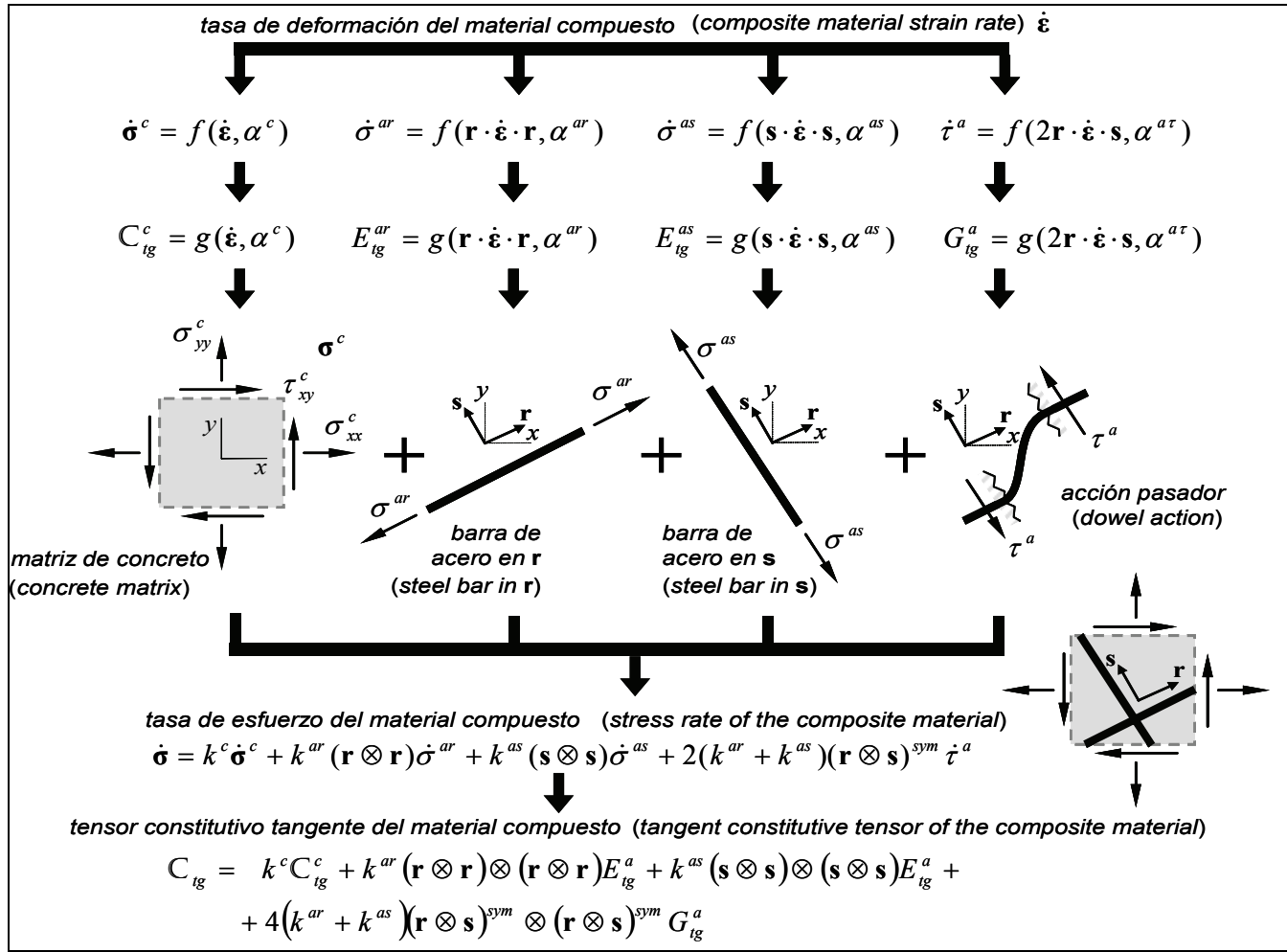
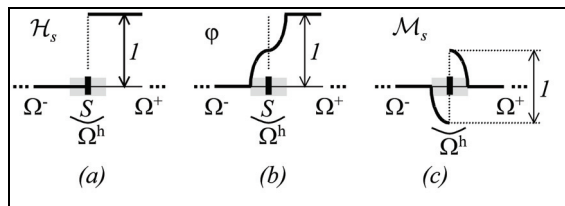


Figura 3. Modelo constitutivo del concreto reforzado como material compuesto

Figure 3. Constitutive model of reinforced concrete as a composite material

En español

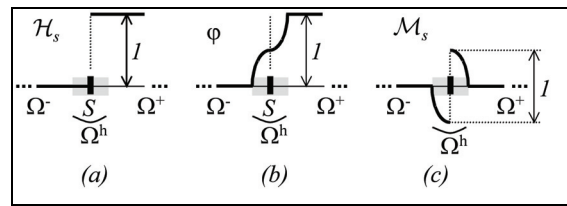
Figura 4. Funciones especiales del campo de los desplazamientos: a) función de Heaviside, b) función φ y c) función salto unitario.

Dado que el gradiente de la función de Heaviside produce un valor no acotado igual a $\nabla H_s = \delta_s \mathbf{n}$, la tasa de deformación se puede expresar como la suma de una parte regular o acotada de la forma:

$$\dot{\mathbf{\epsilon}} = (\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}})^{sym} - (\nabla \varphi \otimes [\![\dot{\mathbf{u}}]\!]) \quad (12)$$

más una parte singular o no acotada igual a $(\delta_s \mathbf{n} \otimes [\![\dot{\mathbf{u}}]\!])$. La función delta de Dirac δ_s es aproximadamente igual a una función regularizada δ_s^h aplicada en la banda Ω^h de ancho $h \equiv 0$ que está contenida en la discontinuidad S . Tal función regularizada se expresa como:

In English

Figure 4. Special functions of displacement fields: (a) Heaviside's function, (b) function φ , and (c) unit jump function.

Given that the gradient of Heaviside's function produced an unbounded value equal to $\nabla H_s = \delta_s \mathbf{n}$, the strain rate could be indicated as the sum of a regular or bounded part, thus:

$$\dot{\mathbf{\epsilon}} = (\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}})^{sym} - (\nabla \varphi \otimes [\![\dot{\mathbf{u}}]\!]) \quad (12)$$

plus a singular or unbounded part equal to $(\delta_s \mathbf{n} \otimes [\![\dot{\mathbf{u}}]\!])$. Dirac's delta function δ_s was approximately equal to a regularised function δ_s^h applied in a band Ω^h with width $h \equiv 0$ which was inside discontinuity S . This regularised function was:

En español

$$\delta_s^h(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \mu_s(\mathbf{x}) \frac{1}{h}; \quad \mu_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega^h \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega^h \end{cases} \quad (13)$$

siendo μ_s una función de colocación sobre Ω^h . De acuerdo a lo anterior, la tasa de deformación del material compuesto es igual a:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\delta_s^h \mathbf{n} \otimes [\![\dot{\mathbf{u}}]\!])^{sym} \quad (14)$$

Antes de la deformación de una discontinuidad fuerte, el ancho de la banda h adopta valores pequeños diferentes de cero. Esta etapa previa, denominada discontinuidad débil, muestra un valor acotado de la tasa de deformación de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\mu_s}{h} (\mathbf{n} \otimes [\![\dot{\mathbf{u}}]\!])^{sym} \quad (15)$$

Análisis de bifurcación material

En los ensayos donde el refuerzo está repartido uniformemente en toda la probeta se distinguen las siguientes dos etapas posteriores al régimen elástico del concreto: una primera etapa, de fisuración distribuida bastante prolongada en virtud de la capacidad del acero y de la adherencia entre el concreto y el acero, en la que se presentan muchas fisuras de poca apertura y de separación constante; y una segunda fase de fallo discontinuo o localizado, presente cuando la apertura de pocas fisuras se impone sobre las demás y decae la capacidad estructural. En el contexto de la mecánica del continuo, el análisis de bifurcación material permite determinar el comienzo y la dirección de las fisuras en la etapa de fractura localizada.

En un punto material la tasa del campo del desplazamiento, la deformación y el esfuerzo están definidos en la escala del compuesto. Esto permite suponer que el análisis de bifurcación utilizado en materiales homogéneos (Rice, 1976; Runesson *et al.*, 1991) es aplicable al modelo de concreto reforzado presentado (Linero *et al.*, 2009).

Considerando que el tensor constitutivo tangente del compuesto es igual en los dominios Ω^+ y Ω^- , y sustituyendo la ecuación constitutiva del concreto reforzado en la condición de continuidad de tracciones, se obtiene que:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{ig} \cdot \mathbf{n}) \cdot [\![\dot{\mathbf{u}}]\!] = \mathbf{Q}_{ig}(t, \mathbf{n}) \cdot [\![\dot{\mathbf{u}}]\!] = 0 \quad (16)$$

De acuerdo con la cinemática descrita, un salto en el campo de la tasa de desplazamiento diferente de cero $[\![\dot{\mathbf{u}}]\!] \neq 0$, es una condición suficiente para la existencia de un modo de discontinuidad fuerte. Por lo tanto, como lo establece la ecuación anterior, el tensor de localización $\mathbf{Q}_{ig}(t, \mathbf{n})$ debe ser nulo en el instante de bifurcación $t = t_B$ y en la dirección normal a la discontinuidad $\mathbf{n} = \mathbf{n}_B$, de tal forma que:

$$\mathbf{Q}_{ig}(t_B, \mathbf{n}_B) = 0 \rightarrow \det[\mathbf{Q}_{ig}(t_B, \mathbf{n}_B)] = 0 \quad (17)$$

Conclusiones

La formulación de un modelo constitutivo que describe directamente el campo de deformación y de esfuerzo en un punto de material compuesto tipo concreto reforzado, ofrece dos ventajas

In English

$$\delta_s^h(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \mu_s(\mathbf{x}) \frac{1}{h}; \quad \mu_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega^h \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega^h \end{cases} \quad (13)$$

where μ_s was a collocation function on Ω^h ; therefore, the strain rate of composite material was equal to:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\delta_s^h \mathbf{n} \otimes [\![\dot{\mathbf{u}}]\!])^{sym} \quad (14)$$

Band width h took a small value different to zero, before forming a strong discontinuity. This previous stage is named weak discontinuity and showed a bounded strain rate value, thus:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\mu_s}{h} (\mathbf{n} \otimes [\![\dot{\mathbf{u}}]\!])^{sym} \quad (15)$$

Bifurcation analysis in the material

In the tests where reinforcement was uniformly distributed throughout the whole member (after the elastic regime of the concrete), two stages were distinguished. Initially a lengthy distributed cracking stage showed many slight cracks having constant separation due to the steel's capacity and to good adherence between the concrete and the bars. In a second step, called discontinuous or located failure stage, it was observed that the opening of a few cracks prevailed on the others, whereas structural capacity decayed. In the context of continuum mechanics, the bifurcation analysis of the material led to determining the beginning and the direction of the cracks in the located failure stage.

The displacement rate field, the strain rate and the stress rate were defined on the composite material scale at a material point. This led to assuming that the discontinuous bifurcation analysis used in homogenous materials (Rice, 1976; Runesson *et al.*, 1991) could be applicable to composite materials such as the reinforced concrete presented in this work (Linero *et al.*, 2009).

Considering that the tangent constitutive tensor of the composite material in domains Ω^+ and Ω^- were the same, and replacing the constitutive equation of the composite material in the traction continuity condition, then:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{ig} \cdot \mathbf{n}) \cdot [\![\dot{\mathbf{u}}]\!] = \mathbf{Q}_{ig}(t, \mathbf{n}) \cdot [\![\dot{\mathbf{u}}]\!] = 0 \quad (16)$$

According to the aforementioned kinematics, a jump in the displacement rate field different from zero $[\![\dot{\mathbf{u}}]\!] \neq 0$ was a sufficient condition for the existence of a strong discontinuity mode. Therefore, fulfilling the previous equation, the localisation tensor $\mathbf{Q}_{ig}(t, \mathbf{n})$ must have been null at bifurcation time $t = t_B$ and in the direction normal to discontinuity $\mathbf{n} = \mathbf{n}_B$, so that:

$$\mathbf{Q}_{ig}(t_B, \mathbf{n}_B) = 0 \rightarrow \det[\mathbf{Q}_{ig}(t_B, \mathbf{n}_B)] = 0 \quad (17)$$

Conclusions

Formulating a constitutive model directly describing the strain and stress fields in a point of composite material such as reinforced concrete offers two important advantages.

En español

importantes. Por un lado, facilita la implementación en el método de los elementos finitos, dado que permanecen muchas características del procedimiento numérico convencional. Asimismo, permite el análisis del problema en la escala de estructura o macroscópica, con lo que se elude la construcción de mallas de elementos finitos de cada material componente y de sus efectos de interacción, evitando así un alto costo computacional.

La metodología de discontinuidades fuertes de continuo puede aplicarse a materiales reforzados con fibras largas si se considera un campo común de deformaciones como lo establece la teoría de mezclas. La formulación presentada conserva el contexto de la mecánica del medio continuo, a pesar de que cada punto material muestra un carácter discontinuo debido a la formación de fisuras y heterogéneo por las diferencias mecánicas entre el concreto y el acero.

El modelo de barra deslizante considera el comportamiento mecánico de la barra y la diferencia entre las deformaciones de la matriz de concreto y de las barras de acero causada por el deslizamiento entre ambos materiales. Tal modelo conserva la compatibilidad de deformaciones de los materiales componentes como hipótesis básica de la teoría de mezclas.

La acción pasador, definida como la capacidad a cortante de las barras de refuerzo que atraviesan una fisura, se introduce en la formulación mediante una ley de comportamiento unidimensional a cortante del acero, caracterizado por las propiedades mecánicas del material y geométricas de la sección transversal de las barras. Con este modelo se puede simular numéricamente el proceso de fractura en elementos estructurales de concreto reforzado, principalmente cuando la densidad del refuerzo dificulta la modelación de cada barra, como en muros de cortante, vigas altas, placas, etcétera.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Ministerio de Ciencia y Tecnología de España por la financiación de los proyectos BIA2005-09250-C03-03 y BIA2004-02080. En particular, el primer autor agradece a la Dirección Nacional de Investigación de la Universidad Nacional de Colombia por el apoyo recibido.

Nomenclatura

α^c	Variables internas del modelo de daño escalar isótropo aplicado al concreto simple.
C_{ig}^c	Tensor constitutivo tangente del concreto simple.
C_{ig}	Tensor constitutivo tangente del concreto reforzado.
δ_s, δ_s^h	Función delta de Dirac sin regularizar y regularizada alrededor de la discontinuidad S , respectivamente.
$\dot{\epsilon}_{rr}, \dot{\epsilon}_{ss}, \dot{\gamma}_{rs}$	Componentes de la tasa del tensor deformación del concreto reforzado en el plano rs , en notación ingenieril.
$\epsilon_{rr}, \epsilon_{ss}, \gamma_{rs}$	Componentes del tensor deformación del concreto reforzado en el plano rs , en notación ingenieril.
$\epsilon^{ar}, \dot{\epsilon}^{ar}$	Deformación longitudinal y tasa de la deformación longitudinal en las barras de acero orientadas en dirección r .
$\epsilon^{as}, \dot{\epsilon}^{as}$	Deformación longitudinal y tasa de la deformación longitudinal en las barras de acero orientadas en dirección s .
ϵ_p^a, α^a	Deformación plástica y variables internas del modelo de barra deslizante.

In English

It facilitates implementation in the finite elements method since many of the ingredients of the conventional numerical procedure are kept. Likewise, it allows the problem to be analysed on a structural or macroscopic scale thereby avoiding high computational costs because of the mesh for each component material and its effects of interaction.

The continuum strong discontinuity approach can be easily applied to materials reinforced with long bars, considering a common strain field such as that established by the mixture theory. The formulation presented here preserves the context of continuous mechanics, although each material point has a discontinuous nature due to the development of cracks and the mechanical difference between concrete and steel.

The slipping fibre model includes the mechanical behaviour of the bar and the difference between the strain of the concrete matrix and steel bars caused by slipping between both materials. This model maintains the strain compatibility of the component materials as a basic hypothesis of the mixture theory.

The dowel action is defined as being the shear capacity of the reinforcement bars crossing a crack. A one-dimensional law of steel shear behaviour is introduced into the formulation which is characterised by the material's mechanical properties and the geometric properties pertaining to the cross-section of the bars. This model can numerically simulate the fracture process in structural members of reinforced concrete such as shear wall, beams, plates, etc., mainly when the density of reinforcement makes the modelling of each bar difficult.

Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge the financial support provided by the Spanish Ministry of Science and Technology (grants BIA2005-09250-C03-03 and BIA2004-02080). The first author would particularly like to acknowledge the support provided by the DIB, Universidad Nacional de Colombia.

Notation

α^c	Internal variables of isotropic scalar damage model applied to simple concrete
C_{ig}^c	Tangent constitutive tensor of simple concrete
C_{ig}	Tangent constitutive tensor of reinforced concrete
δ_s, δ_s^h	Non-regularised and regularised Dirac's delta functions about discontinuity S ,
$\dot{\epsilon}_{rr}, \dot{\epsilon}_{ss}, \dot{\gamma}_{rs}$	Terms of strain rate tensor of reinforced concrete at plane rs , in engineering notation
$\epsilon_{rr}, \epsilon_{ss}, \gamma_{rs}$	Terms of strain tensor of reinforced concrete at plane rs , in engineering notation
$\epsilon^{ar}, \dot{\epsilon}^{ar}$	Normal strain and normal strain rate in steel bars orientated in direction r
$\epsilon^{as}, \dot{\epsilon}^{as}$	Normal strain and normal strain rate in steel bars orientated in direction s
ϵ_p^a, α^a	Plastic strain and internal variables of the slipping bar model

En español

E^a, E_{ig}^a	Módulo de elasticidad inicial y tangente del acero de acuerdo con el modelo de barra deslizante.
$\dot{\epsilon}$	Parte regular de la tasa de deformación del concreto reforzado.
$\dot{\epsilon}^a$	Tasa de la deformación longitudinal en el acero de acuerdo con el modelo de barra deslizante.
$\dot{\epsilon}^c$	Tasa del tensor deformación del concreto simple.
$\epsilon, \dot{\epsilon}$	Tensor deformación y tasa del tensor deformación del concreto reforzado.
$\gamma^a, \dot{\gamma}^a$	Deformación angular y tasa de la deformación angular ingenieril en el acero.
φ	Función continua definida en una banda Ω^h en el interior de la discontinuidad S.
G^a, G_{ig}^a	Módulo de elasticidad a cortante inicial y tangente del acero.
H^a	Módulo de endurecimiento del modelo de plasticidad aplicado al acero.
k^c, k^{ar}, k^{as}	Coefficientes de participación volumétrica de la matriz de concreto, las barras de acero en dirección r y las barras de acero en dirección s , respectivamente.
M_S, H_S	Función elemental de salto unitario y función de Heaviside
μ_S	Función de colocación sobre Ω^h .
\mathbf{n}	Vector unitario normal a la superficie de discontinuidad S.
Ω^h	Banda alrededor de la discontinuidad S de ancho h .
Ω	Dominio total de un sólido.
Ω^+, Ω^-	Partes del dominio total de un sólido divididas por la superficie de discontinuidad S.
$\mathbf{Q}_{ig}(t_B, \mathbf{n}_B)$	Tensor de localización del concreto reforzado evaluado en el instante de bifurcación t_B y en la dirección normal a la discontinuidad \mathbf{n}_B .
\mathbf{r}	Vector unitario que indica la dirección del primer paquete de barras paralelas.
σ_y	Esfuerzo de fluencia del acero a tracción o a compresión.
σ_{adh}	Esfuerzo en el acero cuando se pierde la adherencia con el concreto.
σ_t^c, σ_c^c	Resistencia del concreto simple a tracción y a compresión, respectivamente.
S	Superficie de discontinuidad fuerte.
$\dot{\sigma}^{ar}, \dot{\sigma}^{as}$	Tasa de esfuerzo normal en las barras de acero orientadas en dirección r y en la dirección s , respectivamente.
$\dot{\sigma}^a$	Tasa del esfuerzo normal en el acero de acuerdo con el modelo de barra deslizante.
$\dot{\sigma}^c$	Tasa del tensor esfuerzo del concreto simple.
$\sigma, \dot{\sigma}$	Tensor esfuerzo y tasa del tensor esfuerzo en el concreto reforzado.
s	Vector unitario que indica la dirección del segundo paquete de barras paralelas.
τ_y	Esfuerzo de fluencia a cortante del acero.
$\dot{\tau}^a$	Tasa del esfuerzo cortante en el acero.
$\ddot{\mathbf{u}}$	Parte continua de la tasa del vector desplazamiento del concreto reforzado.

In English

E^a, E_{ig}^a	Initial and tangent steel elasticity modulus according to the slipping bar model
$\dot{\epsilon}$	Regular part of the strain rate of reinforced concrete
$\dot{\epsilon}^a$	Steel normal strain rate according to slipping bar model
$\dot{\epsilon}^c$	Strain rate tensor of simple concrete
$\epsilon, \dot{\epsilon}$	Strain tensor and strain rate tensor of reinforced concrete
$\gamma^a, \dot{\gamma}^a$	Shear strain and engineering shear strain rate of steel
φ	Continuous function defined in a band Ω^h inside discontinuity S
G^a, G_{ig}^a	Initial and tangent shear elasticity modulus of the steel
H^a	Hardening modulus of the plasticity model applied to the steel
k^c, k^{ar}, k^{as}	Volumetric participation factors of the concrete matrix, steel bars in r direction and steel bars in s direction
M_S, H_S	Unit jump function and Heaviside's function
μ_S	Collocation function on Ω^h
\mathbf{n}	Unit vector normal to discontinuity surface S
Ω^h	Band around discontinuity S of width h
Ω	Domain of a whole solid
Ω^+, Ω^-	Sub-domains of a solid split by discontinuity surface S
$\mathbf{Q}_{ig}(t_B, \mathbf{n}_B)$	Localisation tensor of reinforced concrete evaluated in bifurcation time t_B and in the direction normal to discontinuity \mathbf{n}_B
\mathbf{r}	Unit vector indicating the orientation of the first parallel bars package
σ_y	Steel yielding stress to tension or compression
σ_{adh}	Steel stress when adherence with concrete has disappeared
σ_t^c, σ_c^c	Simple concrete strength to tension and compression, respectively
S	Strong discontinuity surface
$\dot{\sigma}^{ar}, \dot{\sigma}^{as}$	Normal stress rate of the steel bars orientated in direction r and s , respectively.
$\dot{\sigma}^a$	Normal stress rate of the steel according to the slipping bar model
$\dot{\sigma}^c$	Stress rate tensor of simple concrete
$\sigma, \dot{\sigma}$	Stress tensor and stress rate tensor of reinforced concrete
s	Unit vector indicating the orientation of the second parallel bars package
τ_y	Steel shear yielding stress
$\dot{\tau}^a$	Steel shear stress rate
$\ddot{\mathbf{u}}$	Continuous part of the displacement rate vector of reinforced concrete

En español

- $\{\mathbf{u}\}$, $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ Salto del vector desplazamiento y de la tasa del vector desplazamiento del concreto reforzado.
- $\dot{\mathbf{u}}$ Tasa del vector desplazamiento del concreto reforzado.

Bibliografía / References

- Belletti, B., Bernardi, P., Cerioni, R., Iori, I., On the behaviour of R/C beams without shear reinforcement., Computational modelling of concrete structures, Austria, Balkema Publisher, 2003.
- Belletti, B., Cerioni, R., Iori, I., Physical approach for reinforced-concrete (PARC) membrane elements., Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 127, No. 12, 2001, pp. 1412-1426.
- de Souza, E. A., Peric, D., Owen, D. R. J., Computational methods for plasticity, 2008.
- Feenstra, P., de Borst, R., Constitutive model for reinforced concrete., Journal of Engineering Mechanics – ASCE, Vol. 121, No. 5, 1995, pp. 587-595.
- Gambarova, P., Rosati, G., Zasso, B., Steel-to-concrete bond after concrete splitting: test results., Materials and Structures, Vol. 127, No. 22, 1989, pp. 35 - 47.
- Hutchinson, J., Jensen, H., Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction., Mechanics of Materials, Vol. 9, No. 2, 1990, pp. 139-163.
- Jendele, L., Cervenka, J., Saouma, V., Pukl, R., On the choice between discrete or smeared approach in practical structural FE analyses of concrete structures., Fourth International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation Glasgow, Scotland UK, 2001.
- Lemaitre, J., A course on damage mechanics., Springer-Verlag, 1992.
- Lemaitre, J., Desmorat, R., Engineering Damage Mechanics., Springer, 2005.
- Linero, D. L., Oliver, X., Huespe, A. E., A model of material failure for reinforced concrete via continuum strong discontinuity approach and mixing theory., Barcelona, International Center for Numerical Methods in Engineering, 2007.
- Linero, D. L., Oliver, X., Huespe, A. E., Análisis de bifurcación material del hormigón armado mediante la metodología de discontinuidades fuertes., Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería, 2009.
- Luccioni, B., Lopez, D., Modelo para materiales compuestos con deslizamiento de fibras., Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos, Barcelona, CIMNE, 2002.
- Luccioni, B., Lopez, D., Danesi, R., Bond-slip in reinforced concrete elements., Journal of Structural Engineering ASCE, Vol. 131, No. 11, 2005, pp. 1690-1698.
- Menin, R. C. G., Trautwein, L. M., Bittencourt, T. N., Smeared crack models for reinforced concrete beams by finite element method., IBRACON Structures and Materials journal, Vol. 2, No. 2, 2009, pp. 166 - 200.
- Naaman, A., Namur, G., Alwan, J., Najm, H., Fiber pullout and bond slip II. Experimental validation., Journal of Structural Engineering ASCE, Vol. 117, No. 9, 1991, pp. 2791-2800.
- Nawy, E., Reinforced concrete: A fundamental approach., Prentice Hall, 2008.
- Oliver, J., Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part I: Fundamentals.,

In English

- $\{\mathbf{u}\}$, $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ Displacement jump vector and displacement jump rate vector of reinforced concrete
- $\dot{\mathbf{u}}$ Displacement rate vector of reinforced concrete

- International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, 1996a, pp. 3575-3600.
- Oliver, J., Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part II: Numerical Simulation., International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, 1996b, pp. 3601-3623.
- Oliver, J., On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations., International Journal of Solid and Structures, Vol. 37, 2000, pp. 7207-7229.
- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S., Lubliner, J., Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete., SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, 1990.
- Oliver, J., Huespe, A., Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings., Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 193, 2004a, pp. 3195 - 3220.
- Oliver, J., Huespe, A., Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios., Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 193, 2004b, pp. 2987-3014.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Blanco, S., Linero, D. L., Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure in the strong discontinuity approach., Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, No. 52, 2006, pp. 7093-7114.
- Oliver, X., Linero, D. L., Huespe, A. E., Manzoli, O. L., Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach., Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 197, No. 5, 2008, pp. 332-348.
- Oller, S., Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos., Barcelona, CIMNE, 2003.
- Park, R., Paulay, T., Reinforced Concrete Structures., 1975.
- Pietruszczak, S., Winnicki, A., Constitutive model for concrete with embedded sets of reinforcement., Journal of Engineering Mechanics – ASCE, Vol. 129, No. 7, 2003, pp. 725-738.
- Pietruszczak, S., Xu, G., Brittle response of concrete as a localization problem., International Journal of Solid and Structures, Vol. 32, 1995, pp. 1517-1533.
- Rice, J. R., The Localization of Plastic Deformation., Theoretical and Applied Mechanics, North-Holland Publ. Co., 1976, pp. 207-220.
- Ruiz, G., Carmona, J., Cendón, D., Propagation of a cohesive crack through adherent reinforcement layers., Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, No. 52, 2006, pp. 7237-7248.
- Runesson, K., Ottosen, N., Peric, D., Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain., International Journal of Plasticity, Vol. 7, 1991, pp. 99 - 121.
- Shi, Z., Crack Analysis in Structural Concrete., Burlington, USA, Butterworth-Heinemann Elsevier, 2009.
- Simó, J., Hughes, T. H. R., Computational Inelasticity., New York, Springer-Verlag, 1998.
- Truesdell, C., Toupin, R., The classical field theories., Berlin, 1960.
- Yu, R., Ruiz, G., Static multi-cracking modeling of LRC beams, VII International Conference on Computational Plasticity., Barcelona, CIMNE, 2005.